- Matrici: proprietà e operazioni
- Sistemi lineari: Gauss - Jordan
- Spazi vettoriali:
- Omomorfismi
- Diagonalizzazione

Cose da ricordare

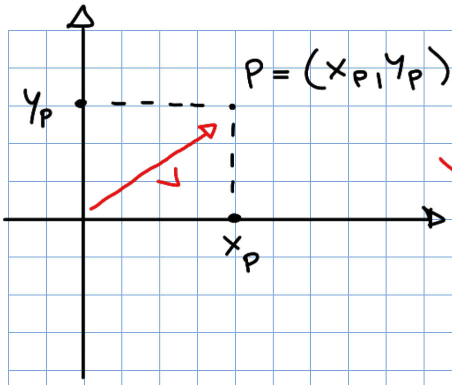
1. Definizioni
2. Domande automatiche

   Matrice → Dimensioni

   Spazio vettoriale → Base
3. Gauss - Jordan

   Diagonalizzazione

4. Essere consapevole di quello che si fa



$$R^2 = \{(x,y) \mid x,y \in R\}$$

$$v = (x_P, y_P)$$

A^2 = insieme dei punti del piano $\{x;y\}$

R^2 = spazio vettoriale $\{x;y\}$

$$A^2 \to R^2$$

$$(x,y) \to (x,y) = \overbrace{(x,y)-(0,0)}^{\text{definizione del vettore } v}$$

$$R^n \longrightarrow A^n$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}}_{\text{differenze di punti}} = \underset{\text{vettore}}{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}} \longrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

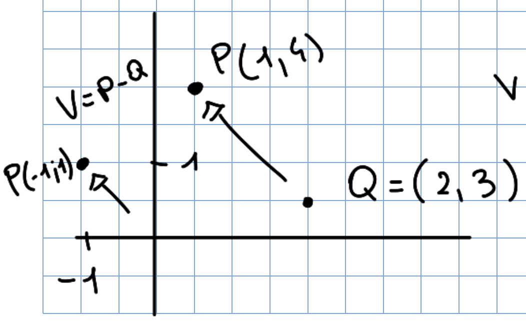
Introduzione di 2 operazioni

$$A^n \times A^n \longrightarrow R^n$$

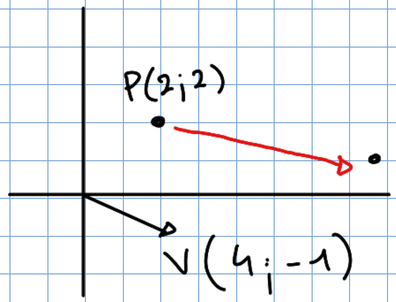
$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix}x_1-y_1\\ \vdots\\ x_n-y_n\end{pmatrix}$$

$$A^n \times R^n \longrightarrow A^n$$

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix}x_1+y_1\\ \vdots\\ x_n+y_n\end{pmatrix}$$



$$V = \begin{pmatrix}1-2\\ 4-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$



$P+v=(2+4,\ 2-1)=(6,1$

sto traslando un vettore rispetto al punto v

$P \in A^n \qquad H \subseteq \mathbb{R}^n$

$$P+\underset{\text{spazio vettoriale}}{H} = \{ P+v \mid v \in H \} \subseteq A^n$$

Esempio:

$H = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^2, \quad P(3,4) \in A^2$

$P+H = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ ovvero $\begin{pmatrix} x \\ 4 \end{pmatrix}$ con $x \in \mathbb{R}$

Uno spazio affine è un sottoinsieme S di A^n tale che $\exists P \in A^n,\ \exists H \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio tale che $S = P+H$

Esempio:

$P \in A^n$

- $\{P\} = P + \{0\}$
- $A^n = 0 + \mathbb{R}^n$
- $H \subseteq \mathbb{R}^n$ spazio vettoriale $\qquad 0+H \subseteq A^n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$\Sigma = P + \Sigma_0 \subseteq A^n$ → è uno spazio affine

una soluzione particolare

soluzione del sistema omogeneo associato

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ z + y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y+1 \\ z = -y+3 \end{cases} = \Sigma \left\{ \begin{pmatrix} y+1 \\ y \\ -y+3 \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

spazio affine

$\Sigma = R + H$

sottospazio direttore

$\dim S = \dim H$

Quindi S è un <u>punto</u> se $\dim H = 0$

<u>retta</u> se $\dim H = 1$

<u>piano</u> se $\dim H = 2$

<u>iper spazio</u> se $\dim H = n-1$

Esempio:

$P = (1, 2, 3, 4) \in A^4$

$V = (1, 0, 0, 1)$

$P + \langle V \rangle \subseteq A^4$

retta in uno spazio quadridimensionale

Forme Cartesiane $\Sigma = \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Forme parametriche $\Sigma = P + \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Esempio cartesiane $\to$ parametriche

$$\Sigma = \begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \subseteq A^3$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ z = y \end{cases} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-y \\ y \\ y \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Esempio parametriche $\to$ cartesiane

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq A^4$$

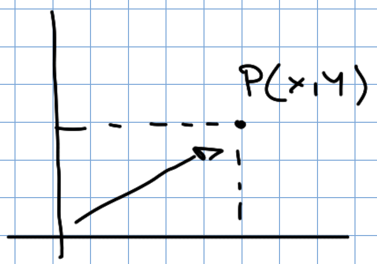
$$H = \text{row} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} = \ker B \Rightarrow \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} x + 2y = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ w = 0 \end{cases} = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \ y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

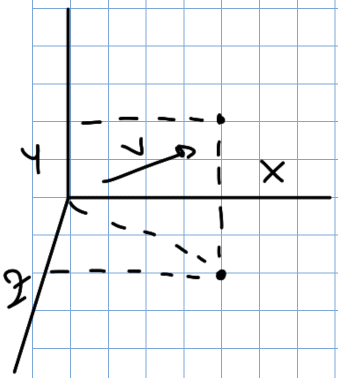
$$= \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H: \begin{cases} -2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Sigma: \begin{cases} -2x + y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Uno spazio affine è uno spazio vettoriale traslato per un punto



$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$v = (x, y, z) \in R^3$$
$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$v = (x, y, z, w) \in R^4$$
$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w}$$

$$|v|^2 = x_1^2 + \dots + x_2^2 = v^t \cdot v$$

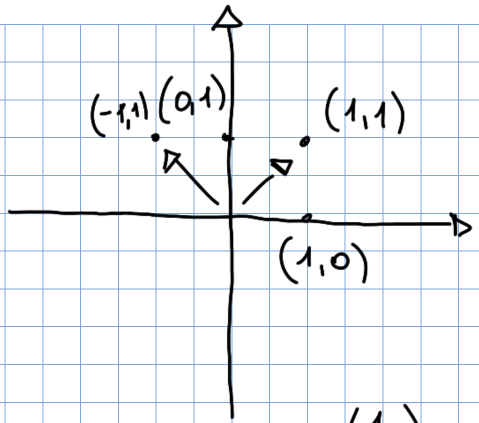
Prodotto scalare

$$R^n \times R^n \longrightarrow R$$
$$v, w \longrightarrow v^t \cdot w$$
$$|v| = \sqrt{v^t \cdot v}$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad w \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad v \cdot w = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = w \cdot v$$

$$|v| = 0 \iff \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = 0 \iff v = 0$$

$$|x \cdot v| = |\lambda| \cdot |\lambda|$$



$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0$$

$y=mx = 0+\langle\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}\rangle$ $\quad (-1,1)(1,1)=-1+1=0$

$y=\frac{1}{m}x \quad 0+\langle\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{m}\end{pmatrix}\rangle \quad \begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{m}\end{pmatrix}=1-1=0$

Definizione

due vettori $v,w \in \mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali se $v\cdot w=0$

Siano $v,w\in\mathbb{R}^n$

$c^2=a^2+b^2+ab\cos\alpha$

Se $v\perp w \quad c^2=a^2+b^2$

$\cos\alpha=\dfrac{c^2-a^2-b^2}{ab}$

l'angolo compreso tra v e w è

$\alpha=\arccos\left(\dfrac{v\cdot w}{\|v\|\cdot\|w\|}\right)\in[0,\pi]$

$(\mathbb{R}^n, \cdot)$ = Spazio euclideo

prodotto scalare